Prof. Dr. Alfred Toth

Quantitatives und qualitatives Kontinuum und Diskontinuum

1. Bekanntlich besagt die von Cantor aufgestellte Kontinuumshypothese, daß es keine überabzählbare Menge von reellen Zahlen gibt, deren Mächtigkeit kleiner ist das diejenige der reellen Zahlen. Unmittelbar daraus folgt also, daß zwischen je zwei reellen Zahlen (Peanozahlen) der Form (V(x), x) bzw. (x, N(x)) genau unendlich viele Zahlen liegen. D.h. es sind wird seit dem Beweis von Cohen angenommen, daß zwischen jedem Paar von Peanozahlen ein Kontinuum liegt, d.h. eine Menge von Zahlen, die keine "Löcher" (gaps) aufweist.

2. Nun hatten wir allerdings bereits in Toth (2019a-d) aufgezeigt, daß die üblicherweise angenommene "deduktive" Hierarchie

Qualität

↑

Quantität

falsch ist und durch die "induktive" Hierarchie

Quantität

↑

Qualität

ersetzt werden muß – übrigens in Einklang mit der Feststellung Hegels, die 2-wertige aristotelische Logik habe alle Qualitäten bis auf die eine Qualität der Quantität eliminiert. Die Ebene der mathematischen Qualitäten liegt also tiefer als die Ebene der mathematischen Quantitäten. Und genau an diese Erkenntnis knüpft auch die weitere Folgerung an, daß quantitative Zahlenkontinua sehr wohl qualitative Zahlendiskontinua enthalten können. Jedenfalls kann man zeigen, daß die qualitative Verallgemeinerung des Satzes von Cantor und Cohen falsch ist.

3. Im folgenden gehen wir aus von den Proto-, Deutero- und Tritozahlen der Kontexturen K = 1 bis K = 4 (Tabelle nach Kronthaler 1986, S. 34).

Protozahlen	Deuterozahlen	Tritozahlen	Kontextur
0	0	0	K = 1
----------	----------	----------	
00	00	00	
01	01	01	K = 2
----------	----------	----------	
000	000	000	
001	001	001	
—	—	010	
—	—	011	
012	012	012	K = 3
----------	----------	----------	
0000	0000	0000	
0001	0001	0001	
—	—	0010	
—	0011	0011	
0012	0012	0012	
—	—	0100	
—	—	0101	
—	—	0102	
—	—	0110	
—	—	0111	
—	—	0112	
—	—	0120	
—	—	0121	

—	—	0122	
0123	0123	0123	K = 4

In dieser Tabelle markieren die dashes die qualitativen gaps der Proto- und Deuterozahlen für Kenosequenzen der Länge K = 4 relativ zu den entsprechenden Tritosequenzen. So weisen also bereits die Deuterozahlen gaps auf gegenüber den Protozahlen, d.h. die Mengen der gaps der beiden polykontexturalen Zahlen sind beweisbar nicht-gleichmächtig. Würde man zu K > 4 fortschreiten, würden auch die Tritozahlen weitere gaps aufweisen, deren Menge ebenfalls nicht-gleichmächtig wäre mit den Proto- und Deuterozahlen für K > 4. Ferner sind, wie man leicht nachprüft, auch die Mengen der gaps der drei polykontexturalen Zahlen für verschiedene Kontexturen, also K = 1 ... K = n paarweise nicht-gleichmächtig.

Daraus folgt zweierlei:

1. Die qualitativen Zahlen bilden kein Kontinuum.

2. Die Kontinua von je zwei quantitativen Zahlen sind durchsetzt mit qualitativen Diskontinua.

4. Als wohl bestes Anwendungsbeispiel dieser beiden Sätze können die von Bense (1981, S. 17 ff.) eingeführten Zeichenzahlen dienen, d.h. Zahlen, die über eine Bezeichnungs- und eine Bedeutungsfunktion verfügen und daher auch mit Sinn und Bedeutung rechnen, also klarerweise qualitative Zahlen sind. In Toth (2019d) waren wir ausgegangen von der triadisch-pentatomischen Zeichenrelation

$Z^{3,5} = (1.a, 2.b, 3.c)$

mit a, b, c $\in$ (1, 2, 3, 4, 5)

und der zugehörigen 3×5-Matrix

	.1	.2	.3	4.	.5
1.	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
2.	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
3.	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5

Wenn wir nun die Kenosequenzen in der obigen Tabelle mit den Subzeichen von $Z^{3,5}$ belegen, erhalten wir

Protozahlen	Deuterozahlen	Tritozahlen	Kontextur
1.1	1.1	1.1	K = 1

1.1	1.1	1.1	
1.2	1.2	1.2	K = 2

Bis zu K = 2 gibt es also keine gaps in den drei qualitativen Zahlen, d.h. bis hierher fallen Quantität und Qualität zusammen.

2.1	2.1	2.1	
2.2	2.2	2.2	
—	—	2.4	
—	—	2.5	
2.3	2.3	2.3	K = 3

Bereits bei K = 3 tauchen zwei qualitative gaps auf zwischen den quantitativen semiotischen Zahlen (2.2) und (2.3). (Quantitativ sind sie deswegen, weil Bense die Peanoaxiome explit mit Hilfe der Semiotik reformuliert hatte; vgl. Bense 1975, S. 167 ff.). Diese qualitativen gaps sind für K = 3 noch gleichmächtig und ferner sogar gleich trotz der verschiedenen qualitativen Zahlen.

1.1	1.1	1.1	
1.2	1.2	1.2	
—	—	1.4	
—	1.5	1.5	
1.3	1.3	1.3	
—	—	2.1	

—	—	2.2	
—	—	2.3	
—	—	2.4	
—	—	2.5	
—	—	3.1	
—	—	3.2	
—	—	3.3	
—	—	3.4	
3.5	3.5	3.5	K = 4.

Ab K = 4 sind auch die qualitativen gaps der Proto- und Deuterozahlen weder gleichmächtig noch gleich, und alle drei qualitativen Zahlen haben paarweise nicht-gleichmächtige und ungleiche gaps. Wie man leicht einsieht und anhand der formalen Grundlagen in Na, von Foerster und Günther (1964) nachprüfen kann, wächst die Zahl der gaps und damit auch der Grad der Nicht-Gleichmächtigkeit sowie der qualitativen Differenzen zwischen den drei qualitativen Zahlen nach der Progression der Bell-Zahlen für jede Kontextur K ≧ 3.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Na, H.S.H., Heinz von Foerster und Gotthard Günther, On Structural Analysis of Many Valued Logic. BCL Publication no. 7.1. Department of Electrical Enigneering, University of Illinois, Urbana, IL, April 1964

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Grundlegung einer polykontexturalen Semiotik. Tucson, AZ, 2019 (= 2019a)

Toth, Alfred, Abbildungen von Peanozahlen auf polykontexturale Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b

Toth, Alfred, Qualitative Kontinua in 4-adischen qualitativen semiotischen Relationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019c

Toth, Alfred, Das Diskontinuum zwischen Index und Symbol. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019d

27.6.2019